PROBABILITAT

ÍNDEX

-Experiències aleatòries. Successos
-Freqüència i probabilitat
-Llei de Laplace
- Probabilitat condicionada. Successos independents
- Proves compostes
-Teorema de la probabilitat total
- Teorema de Bayes

1. EXPERIÈNCIES ALEATÒRIES. ESDEVENIMENTS

-**Experiències aleatòries**: aquella el resultat de la qual depèn de l'atzar. Per exemple: tirar un dau, llençar una moneda a l'aire, treure una bola d'una urna...

-**Experiència determinista**: aquella que partint de les mateixes condicions inicials tenim la certesa del que succeirà. Exemple: temps que tarda un objecte a arribar al terra si el tirem d'una determinada alçada.

- **Esdeveniment aleatori**: és un fet que tindrà lloc o no depenent de l'atzar

- **Espai mostral**: conjunt de tots els possibles resultats d'una experiència aleatòria. Es designa per E.

  -En un dau, E= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- **Esdeveniment**: qualsevol subconjunt de E. En un dau: $\{4, 5, 6\}, \{1\}\{1, 3, 4\}$

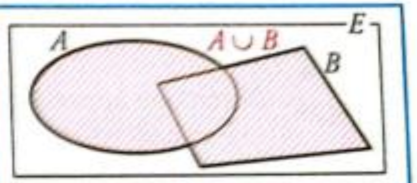
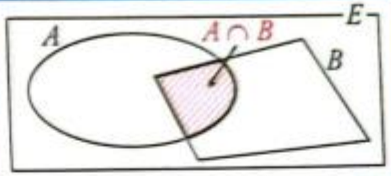
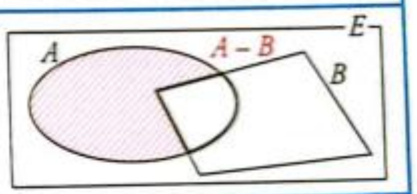
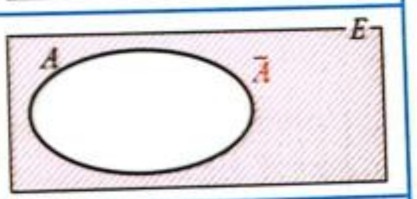
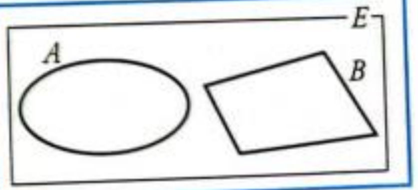
EXPERIÈNCIES ALEATÒRIES. ESDEVENIMENTS

-**Esdeveniment elemental**: esdeveniment format per un sol element de E. També s’anomena cas. Exemples: $\{1\}, \{2\}\ \{4\}\ \{C\}$

- Esdeveniment impossible Ø o buit: no té cap element de E

- Esdeveniment segur: és el propi espai mostra

OPERACIONS AMB ESDEVENIMENTS

UNIÓ D'ESDEVENIMENTS	$A \cup B$ (es llegeix *A unió B*) és l'esdeveniment format per tots els casos de A i de B. L'esdeveniment $A \cup B$ es verifica quan ocorre un dels dos, A o B, o quan ocorren tots dos.	
INTERSECCIÓ D'ESDEVENIMENTS	$A \cap B$ (es llegeix *A intersecció B*) és l'esdeveniment format per tots els casos que són, alhora, de A i de B. L'esdeveniment $A \cap B$ es verifica quan ocorren simultàniament A i B.	
DIFERÈNCIA D'ESDEVENIMENTS	$A - B$ (es llegeix *A menys B*) és l'esdeveniment format per tots els casos de A que no són de B. $A - B$ es verifica quan ho fa A i no B.	
ESDEVENIMENT COMPLEMENTARI	L'esdeveniment $\overline{A} = E - A$ s'anomena **esdeveniment contrari** o **complementari de A**. L'esdeveniment $\overline{A}$ es verifica sempre que no es verifiqui A. L'esdeveniment $\overline{A}$ també se'l sol designar amb A'.	
ESDEVENIMENTS INCOMPATIBLES	Dos esdeveniments, A i B, es diuen **incompatibles** quan no tenen cap cas comú, és a dir, quan $A \cap B = \varnothing$. Els esdeveniments incompatibles no es poden verificar simultàniament.	

U o

∩ i

COL·LEGI DIOCESÀ SAGRADA FAMÍLIA TORTOSA

LLEIS DE MORGAN

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Exemple: tirar un dau

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad B = \{1, 3, 5\}$ $\quad C = \{2, 4\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$

$\bar{A} = \{5, 6\}$

$\bar{B} = \{2, 4, 6\}$

$\overline{A \cup B} = \{6\}$

$\overline{A \cap B} = \{2, 4, 5, 6\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{6\}$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \{2, 4, 5, 6\}$

$B \cap C = \emptyset$

2. FREQÜÈNCIA I PROBABILITAT

- **N:** Nombre de vegades que realitzem una experiència aleatòria.

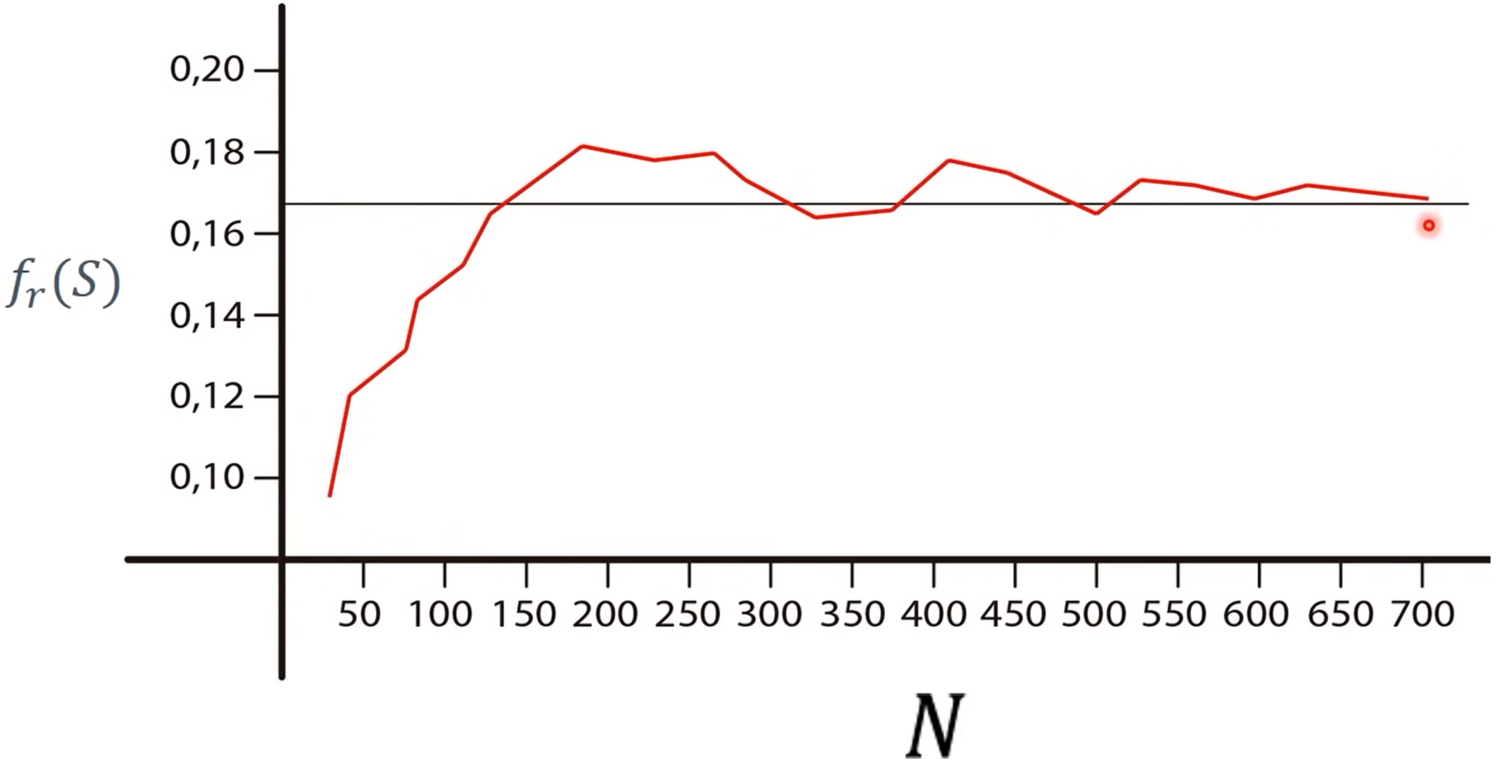
-Freqüència absoluta d'un esdeveniment S **f (S)**: nombre de vegades que ocorre l'esdeveniment S

- Freqüència relativa de S **f_r (S)**: és la proporció de vegades que ocorre S

- Llei dels grans nombres

$$\lim_{N\to\infty} f_r(S) = P[S]$$

S: treure un 5 a un dau



AXIOMES DE LA PROBABILITAT

-**AX 1.** Qualsevol que sigui l'esdeveniment S, P[S] ≥ 0

- **AX 2.** Si dos esdeveniments són incompatibles, la probabilitat de la seva unió és igual a la suma de les probabilitats de les probabilitats

$$A \cap B = \emptyset \to P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

- **AX 3.** La probabilitat total és 1: P[E]=1

TEOREMES DE LA PROBABILITAT

1. $\mathrm{P}[\overline{A}] = 1 - P[A]$
2. $P[\emptyset] = 0$
3. Si A_1, A_2 ..., A_k són incompatibles dos a dos, llavors:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] = P[A_1] + P[A_2] + \cdots + P[Ak]$$

4. $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

LLEI DE LAPLACE

Si $E = \{x_{1,}\, x_{2,\,\dots\,,}\, x_n\}$ i P$[x_1]$=P$[x_2]$=...=P$[x_n]$

P[S]=$\frac{nombre\ d'elements\ de\ S}{n} = \frac{nombre\ de\ casos\ favorables}{nombre\ de\ casos\ possibles}$

La clau per aplicar la llei de Laplace és que tots els esdeveniments elementals tinguin la mateixa probabilitat (equiprobables). Per exemple, un dau, moneda, baralla...

$$P[copes] = \frac{10}{40} = 0{,}25$$

La regla de Laplace no es pot aplicar en

- instruments irregulars. Per exemple xinxetes

- Instruments regulars, esdeveniments elementals no equiprobables.

    Ex: tirem dos daus i sumem els resultats obtinguts.

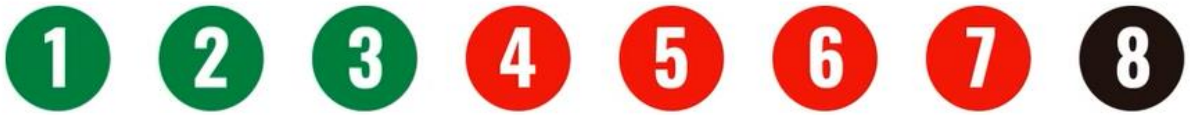
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(2) = \frac{1}{36}$$

$$P(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

4. PROBABILITAT CONDICIONADA



$$P(par) = {}^{4}/_{8} = {}^{1}/_{2}$$

I si sé el color de la bola?

- Si és verda $P(parell/verd) = \frac{1}{3}$
- Si és roja $P(parell/roja) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- SI és negra $P(parell/negra)$= 1

4. PROBABILITAT CONDICIONADA

Donats dos esdeveniments A i C s'anomena probabilitat de A condicionada a C:

$$P[A/C] = \frac{P[A \cap C]}{P[C]}$$

$$P\big[[A \cap C] = P[C] \cdot [A/C]] = P[A] \cdot [C/A]\big]$$

4. PROBABILITAT CONDICIONADA

Dos esdeveniments són independents si la probabilitat que tingui lloc una no depèn de que hagi tingut lloc l'altre:

$P[A/C] = P[A]$

$P[C/A] = P[C]$

A i C independents-> $P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C]$

4. PROBABILITAT CONDICIONADA

NO confondre esdeveniments incompatibles en esdeveniments independents

$$A \text{ y } B \text{ incompatibles } \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$A \text{ y } B \text{ independientes } \Rightarrow P(A/B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

5. PROVES COMPOSTES

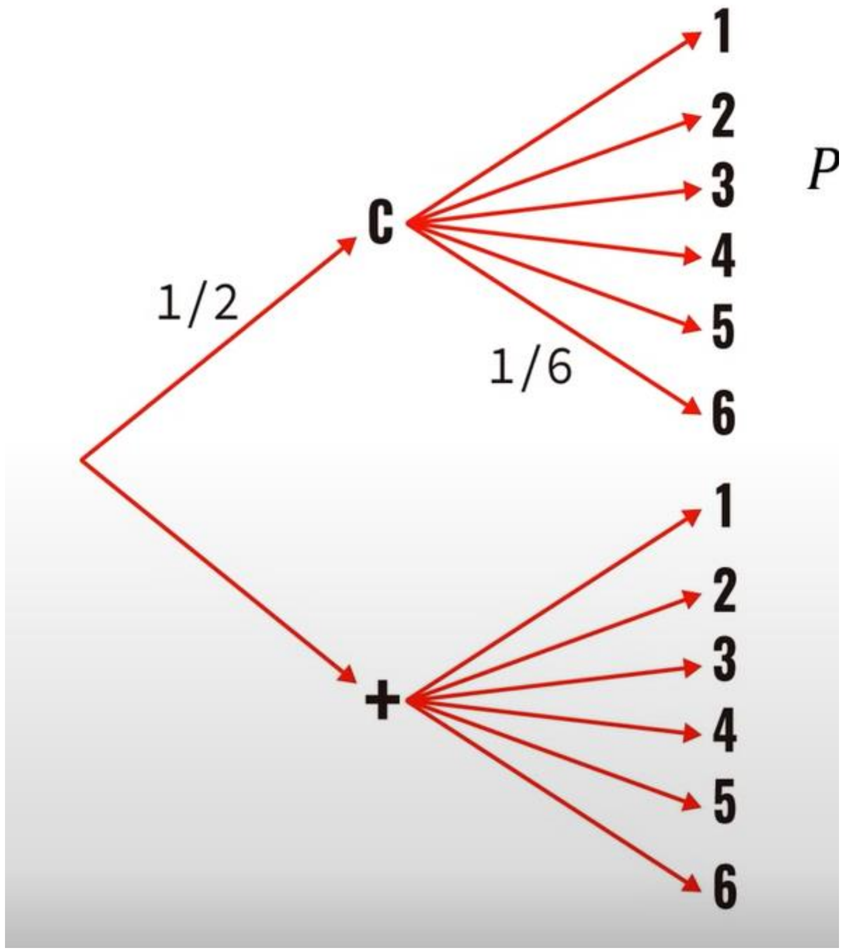
Prova composta: experiències que es poden distingir dues o més etapes

Dues proves són independents quan el resultat d'una no influeix en l'altra. Si no és així són dependents.

Ex:

- Llençar una moneda i un dau són independents
- Extraure dues boles d'una urna amb reemplaçament són independents
- Extreure dues boles d'una urna sense reemplaçar són dependents

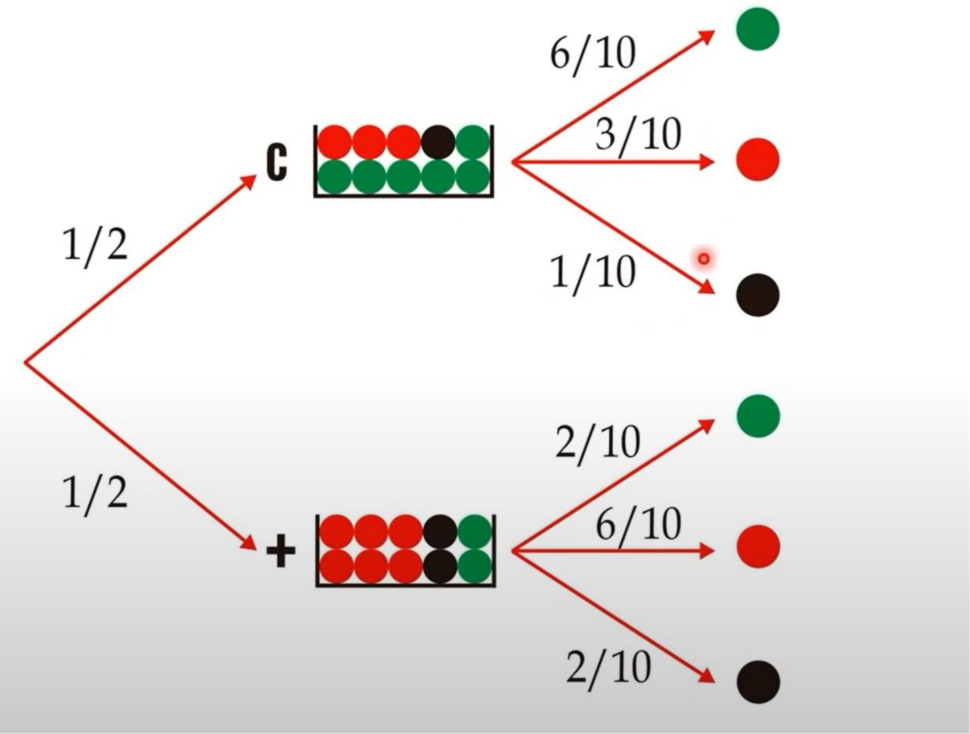
Experiències independents. Tirar una moneda i després tirar un dau



P

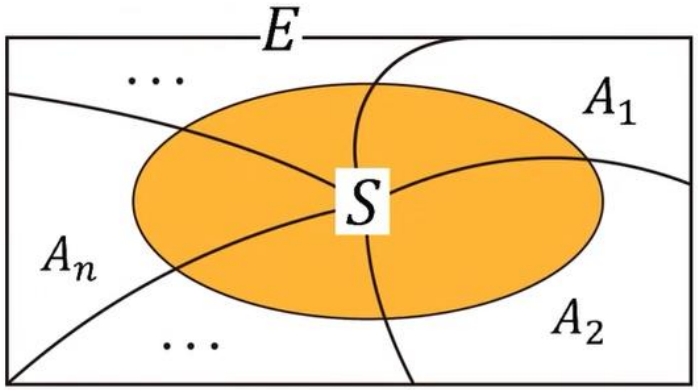
$$P[C \cap 3] = P[C] \cdot P[3]$$

Experiències dependents. Tirar una moneda i després agafar una bola d'una urna o una altra segons si és cara o creu.



$$P[C \cap verda] = P[C] \cdot P\left[\frac{verda}{C}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$$

6. PROBABILITAT TOTAL

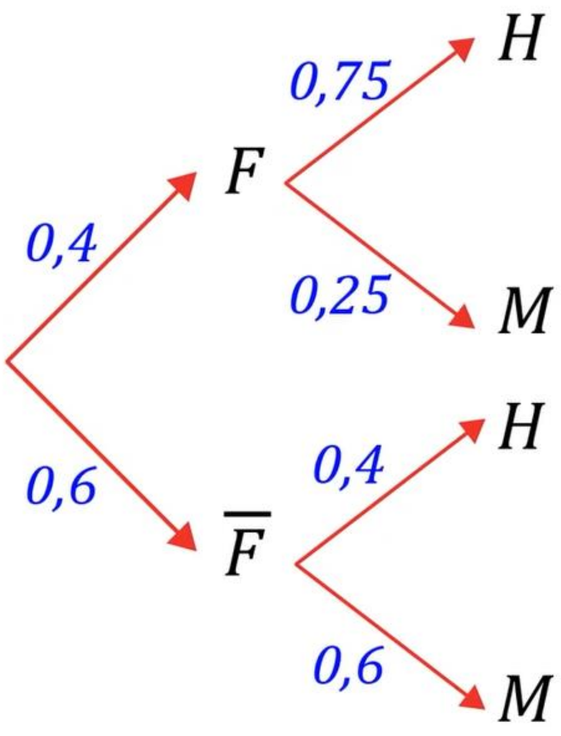


donats n esdeveniments A_1, A_2,..., A_n que són incompatible dos a dos tals que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n$,
P(S) és la probabilitat total

$$P(S) = P(A_1) \cdot P(S/A_1) + P(A_2) \cdot P(S/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(S/A_n)$$

Exemple: un metge observa que el 40% dels seus pacients fuma i d'aquests, el 75% són homes. Entre els que no fumen, el 60% són dones.

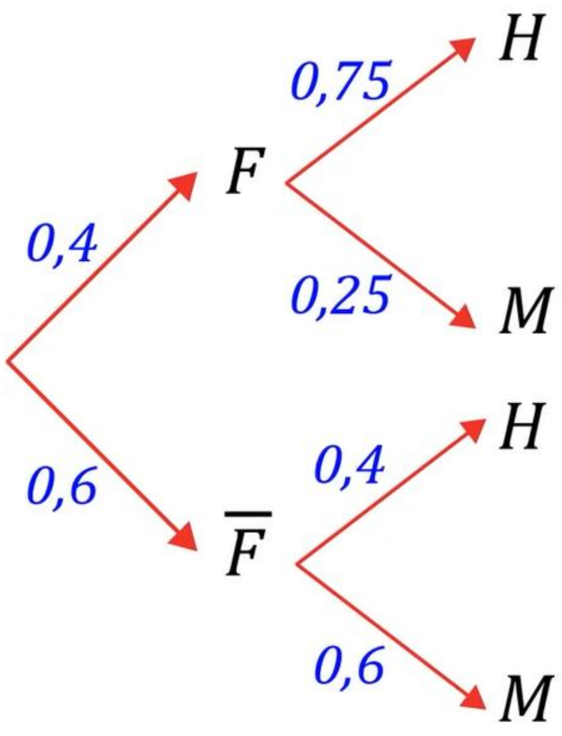
a. Calcula la probabilitat de que un pacient seleccionat al atzar sigui dona



$$P(M) = P(F) \cdot P(M/F) + P(\bar{F}) \cdot P(M/\bar{F}) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}46$$

Exemple: un metge observa que el 40% dels seus pacients fuma i d'aquests, el 75% són homes. Entre els que no fumen, el 60% són dones.

b. Calcula la probabilitat de que un pacient seleccionat al atzar fumi i sigui home.



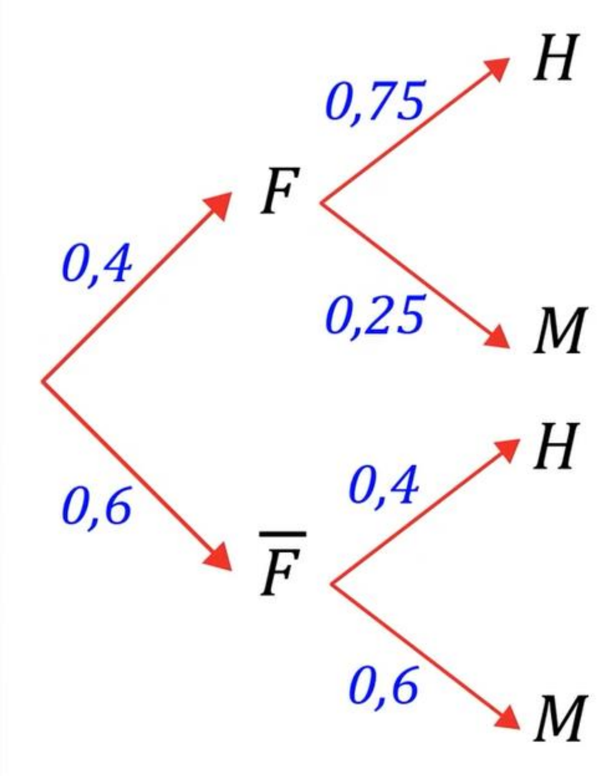
$$P(F \cap H) = P(F) \cdot P(H/F) = 0{,}4 \cdot 0{,}75 = 0{,}3$$

COL·LEGI DIOCESÀ SAGRADA FAMÍLIA TORTOSA

7. PROBABILITATS A POSTERIORI. FÓRMULA DE BAYES

Exemple: un metge observa que el 40% dels seus pacients fuma i d'aquests, el 75% són homes. Entre els que no fumen, el 60% són dones.

c. Sabent que el pacient seleccionat ha estat dona, calcula la probabilitat que sigui fumadora.



$$P(F/M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{P(F) \cdot P(M/F)}{P(M)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}25}{0{,}46} \approx 0{,}2174$$

probabilidad condicionada

probabilidad condicionada

probabilidad total

COL·LEGI DIOCESÀ SAGRADA FAMÍLIA TORTOSA